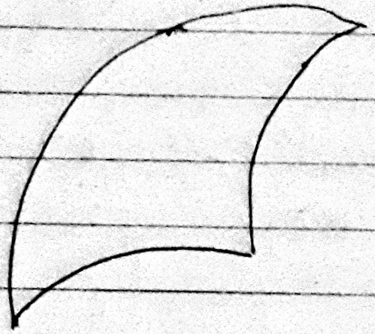
Μάθημα 22ο

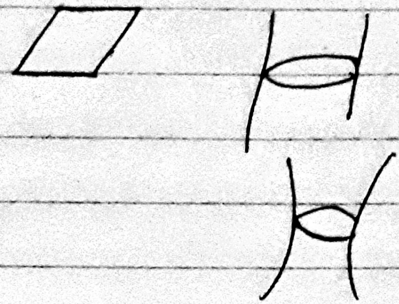
08/01/2018

Ορισμός

Μια επιφάνεια καλείται ευθειογενής αν από κάθε σημείο της διέρχεται ευθεία (ή τμήμα ευθείας) που περιέχεται στην επιφάνεια.

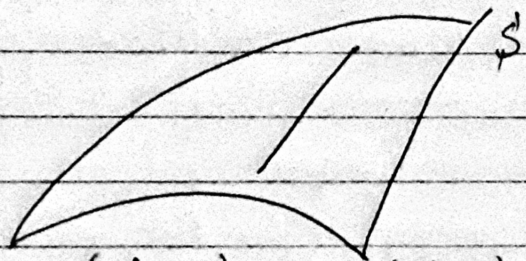


Π.χ



Ερώτηση

Πότε μια επιφάνεια είναι ευθειογενής;



Έστω $c: I \to S$ ευθεία με παράμετρο το μήκος τόξου $s \in I$ $\quad \ddot{c}(s) = 0 \quad \forall\, s \in I$

$$K_n(\dot{c}(s)) = \mathrm{II}_{c(s)}(\dot{c}(s)) = \langle L_{c(s)}(\dot{c}(s)), \dot{c}(s) \rangle = -\langle dN_{c(s)}(\dot{c}(s)), \dot{c}(s) \rangle$$

$$= -\langle (N \circ c)^{\cdot}(s), \dot{c}(s) \rangle = -(\langle N \circ c(s), \dot{c}(s) \rangle)^{\cdot} + \langle N \circ c(s), \ddot{c}(s) \rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{K_n(\dot{c}(s)) = 0}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Οι ευθείες μιας επιφάνειας S είναι ασυμπτωτικές καμπύλες της S

ΠΟΡΙΣΜΑ

Κάθε ευθειογενής επιφάνεια έχει καμπυλότητα Gauss $K \leq 0$

Ερώτημα

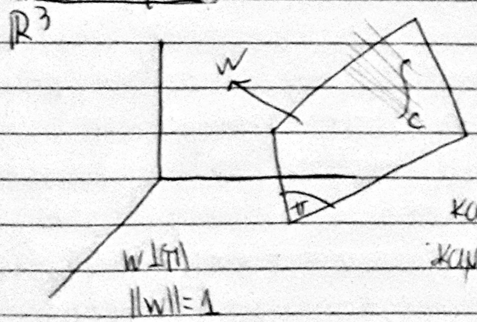
Ποιές είναι οι επιφάνειες που έχουν καμπυλότητα Gauss $K \equiv 0$;

Παρατήρηση

Κάθε επιφάνεια τοπικά ισομετρική με το επίπεδο έχει καμπυλότητα Gauss $K=0$.
Το αντίστροφο;

Παραδείγματα επιφανειών με $K \equiv 0$

1) $\boxed{\text{Κύλινδροι}}$



Θεωρώ καμπύλη $c : I \longrightarrow \Pi$ με παράμετρο το μήκος τόξου.
Η παραμετρική επιφάνεια

$$X : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$X(s,v) = c(s) + vw$$

καλείται κύλινδρος με οδηγό καμπύλη τη c

$$X_s = \dot{c} \quad X_v = w \quad , X_s \times X_v = \dot{c} \times w \neq 0$$

$$\|X_s \times X_v\| = \|\dot{c} \times w\| = \|\dot{c}\| \cdot \|w\| \sin(\dot{c}, w) = 1$$

$$N = \frac{X_s \times X_v}{\|X_s \times X_v\|} \Rightarrow N = \dot{c} \times w$$

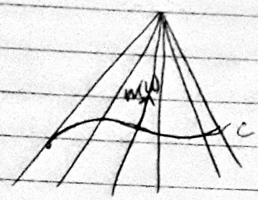
$E = \|X_s\|^2 = \|c'\|^2 = 1$

$F = \langle X_s, X_v \rangle = \langle c', w \rangle = 0$

$G = \|X_v\|^2 = \|w\|^2 = 1$

$\boxed{2)\ \underline{\text{Κώνοι}}}$

Θεωρώ καμπύλη $c: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με παράμετρο $u \in I$ και $w: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ διαν. συνάρτηση με $\|w(u)\| = 1$



Η παραμετρική συνάρτηση $X(u,v) = c(u) + v\,w(u)$ καλείται κωνική αν-ν $w(u) = \alpha c(u) + p_0$, $\alpha \neq 0$, $p_0 \in \mathbb{R}^3$

$X(u,v) = c(u) + v(\alpha c(u) + p_0) = (1 + v a)c(u) + v p_0$

Παρατηρώ ότι $X(u, -\frac{1}{a}) = -\frac{1}{a} p_0$ = η κορυφή του κώνου

$X_u = (1 + va)\,c'(u)$, $X_v = \alpha c(u) + p_0$

$X_u \times X_v = (1 + v\alpha)\,c'(u) \times (\alpha c(u) + p_0)$

$\boxed{\text{Υπολογίζω τα } E, F, G}$ e, f, g

$e = \langle X_{uu}, N \rangle$, $f = \langle X_{uv}, N \rangle$, $g = \langle X_{vv}, N \rangle = 0$

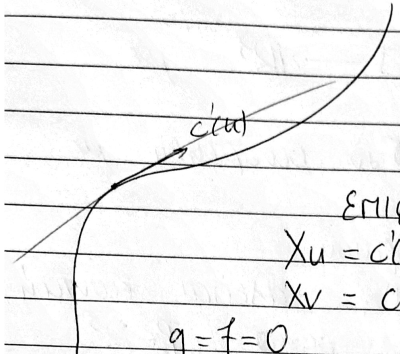
$X_u \times X_v = (1 + va)\,c'(u) \times w(u)$

$N = \dfrac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \dfrac{(1+va)\,c'(u) \times w(u)}{|1+va|\,\|c'(u) \times w(u)\|} = \pm \dfrac{c'(u) \times w(u)}{\|c'(u) \times w(u)\|}$

$f = -\langle X_u, N_v \rangle \overset{N_v = 0}{\Longrightarrow} f = 0$

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \xrightarrow[f=0]{g=0} \boxed{K \equiv 0}$$

3) Επιφάνειες εφαπτομένων



Έστω $c : I \to \mathbb{R}^3$ κανονική καμπύλη με παράμετρο $u \in I$.
Η παραμετρική επιφάνεια $X(u,v) = c(u) + v\,c'(u)$ καλείται επιφάνεια εφαπτομένων της καμπύλης c.

$$\left.\begin{aligned} X_u &= c'(u) + v\,c''(u) \\ X_v &= c'(u) \end{aligned}\right\} \Rightarrow X_u \times X_v = v\,c''(u) \times c'(u)$$

$g = f = 0$

Ερώτημα

Ποιές είναι οι επιφάνειες με $K \equiv 0$;
Οι κυλινδρικές, κωνικές και οι επιφάνειες εφαπτομένων έχουν $K \equiv 0$. Υπάρχουν άλλες;

Έστω S κανονική επιφάνεια με $K \equiv 0$. Υποθέτω ότι δεν έχει ισόπεδα σημεία.
$k_1 k_2 = 0$ (άρα μία (μόνο) από τις 2 κύριες καμπυλότητες είναι μηδέν)

Χωρίς βλάβη της γενικότητας έχω: $k_1 > k_2 = 0$
Από γνωστό θεώρημα γύρω από κάθε σημείο $\exists$ σύστημα συντεταγμένων $X : U \to S$: οι παραμετρικές του καμπύλες να είναι γραμμές καμπυλότητας ή ισοδύναμα X_u, X_v είναι οι κύριες διευθύνσεις.

δηλαδή $LX_u = k_1 X_u$
$LX_v = k_2 X_v = 0$
$LX_u = -N_u, \quad LX_v = -N_v \Rightarrow N_v = 0 \Rightarrow N(u,v) = N(u)$
$N_u(u,v) =$

Γνωρίζω ότι $F = 0 = f$
$f = 0, \quad f = -\langle X_u, N_v \rangle = -\langle X_v, N_u \rangle$

$\Rightarrow \langle X_v, N_u \rangle = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} X_v \perp N_u \\ X_v \perp N \end{matrix}\right\} \Rightarrow X_v \parallel \underbrace{N \times N_u}_{\text{σταθερό}}$

σταθερό διάνυσμα κατά μήκος της $X(u = \text{σταθ}, v)$

$\Rightarrow X(u = \text{σταθ}, v) =$ ευθεία !!!

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια επιφάνεια καλείται αναπτυκτή $\Leftrightarrow$ (i) είναι ευθειογενής και (ii) το μοναδιαίο κάθετο (ή ισοδύναμα το εφαπτόμενο επίπεδο) παραμένει σταθερό κατά μήκος της κάθε γενέτειρας.

<u>π.χ</u> κυλινδρικές, κωνικές, επιφάνειες εφαπτομένων

ΘΕΩΡΗΜΑ

Κάθε επιφάνεια με $K \equiv 0$ χωρίς ισόπεδα σημεία είναι αναπτυκτή.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Κάθε αναπτυκτή επιφάνεια έχει $K \equiv 0$

Έστω S αναπτυκτή επιφάνεια με τρίτη θεμελιώδη μορφή $III_p : T_pS \to \mathbb{R}$ $\quad III_p(w) = \langle L_p w, L_p w \rangle \quad w \in T_pS$

$= \langle dN_p(w), dN_p(w) \rangle \geq 0$

$\mathrm{III}_p - 2H(p)\mathrm{II}_p + K(p)\mathrm{I}_p = 0$

Έστω $c: I \longrightarrow S$ γενέτειρα με παράμετρο το μήκος τόξου $s \in I$.

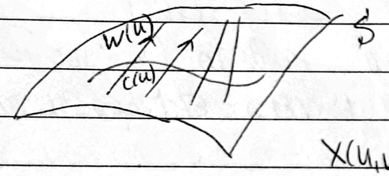
$\mathrm{III}_{c(s)}(\dot{c}(s)) = \|dN_{c(s)}(\dot{c}(s))\|^2 = \|(N\circ c)\dot{}(s)\|^2 = 0$

$\mathrm{III}_{c(s)}(\cancel{\dot{c}(s)}) - 2H(c(s))\,\mathrm{II}_{c(s)}(\cancel{\dot{c}(s)}) + K(c(s))\,\mathrm{I}_{c(s)}(\dot{c}(s)) = 0$

$\Rightarrow K(c(s)) = 0 \Rightarrow K = 0$

$\boxed{\text{ΕΡΩΤΗΜΑ}}$

Πότε μια ευθειογενής επιφάνεια είναι αναπτυκτή.



κάθε ευθειογενή επιφάνεια τοπικά παραμετρίζεται ως:

$X(u,v) = c(u) + v w(u)$, $\|w(u)\| = 1$

$c'(u) X_{vv}(u) \neq 0 \quad \forall u.$

Αν η S είναι αναπτυκτή $\Rightarrow K = 0$
$\Rightarrow eg - f^2 = 0$

$X_u = c'(u) + v w(u)$, $X_v = w(u)$

$X_u \times X_v = (c'(u) + v w(u)) \times w(u)$

$N(u,v) = \dfrac{c'(u) \times w(u) + v w'(u) \times w(u)}{\|\ldots\|}$

$e = \langle X_{uu}, \cancel{N} \rangle$

$f = \langle X_{uv}, N \rangle$, $g = \langle X_{vv}, N \rangle = 0 \overset{K=0}{\Longrightarrow} f = 0$

$X_{uv} = w_u$

$$f = \langle X_{uv}, N\rangle = \frac{\langle w'(u),\ c'(u)\times w(u) + v w'(u)\times w(u)\rangle}{\|\cdots\|}$$

$$= \frac{[c'(u), w(u), w'(u)]}{\|\cdots\|} \xRightarrow{f=0} [c', w, w'] = 0$$

$\boxed{\text{ΘΕΩΡΗΜΑ}}$

Η ευθειογενής επιφάνεια $X(u,v) = c(u) + v w(u)$ είναι αναπτυκτή $\iff [c'(u), w(u), w'(u)] = 0 \ \forall u$

Αντίστροφα, έστω ότι για την ευθειογενή επιφάνεια $X(u,v) = c(u) + v w(u)$ ισχύει : $[c'(u), w(u), w'(u)] = 0 \ \forall u$. Θα δείξω ότι είναι αναπτυκτή.

$$\langle c'(u)\times w(u), w'(u)\rangle = 0 \Rightarrow w' \perp c'\times w$$
$$\|w\| = 1 \Rightarrow \langle w, w\rangle = 1 \Rightarrow 2\langle w', w\rangle = 0 \Rightarrow w' \perp w \quad \Big| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w'(u) \parallel \big(c'(u)\times w(u)\big)\times w(u) = \langle c'(u), w(u)\rangle w(u) - \langle w(u), w(u)\rangle c'(u)$$

$$\iff w'(u) = \mu(u)\big(\langle c'(u), w(u)\rangle w(u) - c'(u)\big)$$

$$c'(u)\times w(u) + v\mu(u)\big(\langle c'(u), w(u)\rangle w(u) - c'(u)\big)\times w(u)$$

$$= c'(u)\times w(u) - v\mu(u)\, c'(u)\times w(u) = (1 - v\mu(u))\, c'(u)\times w(u)$$

$$N(u,v) = \frac{(1 - v\mu(u))\, c'(u)\times w(u)}{|1 - v\mu(u)|\, \|c'(u)\times w(u)\|} = \pm \frac{c'(u)\times w(u)}{\|\cdots\|}$$